ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2019

Α1.

α) Σχ. βιβλίο σελ. 15

β)

i) Σχ. βιβλίο σελ. 35

ii) Σχ. βιβλίο σελ. 36

Α2. Σχ. βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 135

Α4.

α) Λάθος, $f(x)=\begin{cases} 1, x<0 \\ -1, x>0 \end{cases}$

β) Λάθος, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1 \\ 3, x=1 \end{cases}$

Α5. Σωστό είναι το γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Β2. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x$ με $x\in[2,3]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με

- $g(2)=e^{-2}+2-2=e^{-2}>0$,
- $g(3)=e^{-3}+2-3=\dfrac{1}{e^3}-1=\dfrac{1-e^3}{e^3}<0$

Άρα, αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, το οποίο είναι:

$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (2,+\infty)$,

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right) = +\infty$.

Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x}+2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y-2 \overset{y>2}{\Leftrightarrow} -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y-2)$, με $y>2$.

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x>2$.

B4. Αφού η f^{-1} είναι συνεχής στο $(2,+\infty)$ τότε

$$\lim_{x\to2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to2^+}\left(-\ln(x-2)\right) = \ell$$

Θέτω $x-2=u$ και όταν $x\to2^+$ τότε $u\to u_0$ όπου $u_0 = \lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0$.

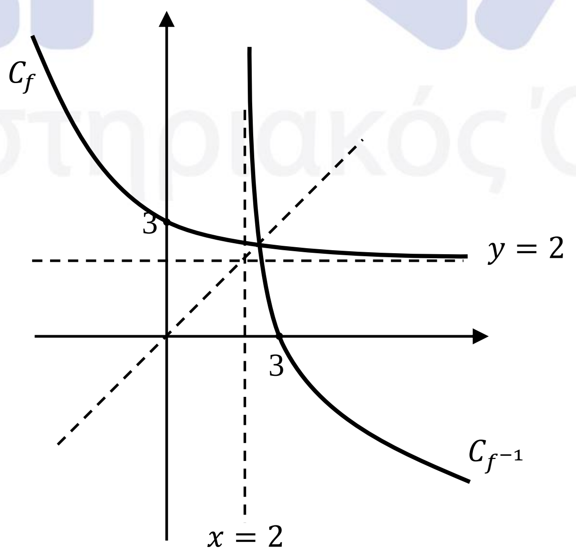
Οπότε $\ell = \lim\limits_{u\to0^+}(-\ln u) = +\infty$.

Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η C_f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της $h(x) = e^{-x}$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, οπότε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$.

Η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3,0)$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x=1$.

Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right) = \lim_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha\right) = 1+\alpha \Leftrightarrow$$

$$1+\beta = 1+\alpha = 1+\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\beta} \ \mathbf{(1)}$$

Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας έχουμε

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ \mathbf{(2)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1} \overset{\alpha=\beta}{=} \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\alpha}{1} = 1+\alpha$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}(x+1) = 2$.

Οπότε η (2) γίνεται $1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$

και λόγω της (1) είναι $\beta=1$.

Γ2. Για $\alpha=\beta=1$ είναι $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\ge1 \\ e^{x-1}+x, x<1 \end{cases}$.

Για $x>1$ είναι $f'(x)=2x>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για $x<1$ είναι $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$, οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο $x=1$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε θα έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$, διότι

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right) = -\infty$, αφού

  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} \overset{x-1=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Γ3.

i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$, άρα

$$f(\Delta) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$$

Το $0 \in f(\Delta)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα της f.

ii) Για $x \in (x_0, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται

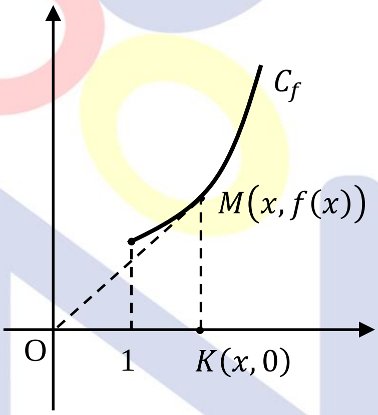
$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \, (1) \\ \text{ή} \\ f(x) = x_0 \, (2) \end{cases}.$$

Η (1) γίνεται $f(x) = f(x_0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = x_0$ απορρίπτεται γιατί $x > x_0$.

Για $x > x_0 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ οπότε η (2) είναι αδύνατη αφού $x_0 < 0$.

Γ4. Για την κάθε χρονική στιγμή t οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M\left(x(t), y(t)\right)$.

Εφόσον το M κινείται στην καμπύλη $y = f(x)$ με $x \geq 1$ τότε $y(t) = x^2(t) + 1$.



Για $t = t_0$ έχουμε

- $x(t_0) = 3$ μονάδες,
- $y(t_0) = 10$ μονάδες και
- $x'(t_0) = 2$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΜΚ δίνεται από τη σχέση

$$E_{OMK} = \frac{OK \cdot MK}{2} = \frac{|x(t)| \cdot |y(t)|}{2} = \frac{x(t) \cdot y(t)}{2}$$

Επομένως $E_{OMK} = E(t) = \dfrac{x(t) \cdot \left(x^2(t) + 1\right)}{2} = \dfrac{x^3(t) + x(t)}{2}$.

Παραγωγίζοντας έχουμε $E'(t) = \dfrac{3x^2(t) x'(t) + x'(t)}{2}$.

Για $t = t_0$ είναι

$$E'(t_0)=\frac{3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=\frac{3\cdot 9\cdot 2+2}{2}=28$$ τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+\alpha$$

Αφού η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$ ισχύει ότι:

$f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$ και $f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1\Leftrightarrow \beta=2$.

Άρα, $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$.

Δ2. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ είναι:

$$E=\int_1^2\left|f(x)-y\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2\right|dx$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$$

διότι για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει

$$x-1\geq 0 \text{ και } \ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left((x-1)^2+1\right)>0$$

Θέτω $(x-1)^2+1=u$. Τότε $(x-1)dx=\frac{1}{2}du$ και:

- για $x=1$ έχουμε $u=1$,
- για $x=2$ έχουμε $u=2$.

Οπότε, $E=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1du=\ln 2-\frac{1}{2}\left[u\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ3.

i) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)-2(x-1)^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow x>1$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα, η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ με τιμή $f'(1)=-1$ και από τον ορισμό του ελαχίστου προκύπτει ότι $f'(x)\ge f'(1)\Leftrightarrow f'(x)\ge -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\ge(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\ge-\frac{1}{2}$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ και αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Από το ερώτημα Δ3.i. έχουμε ότι $f'(\xi)\ge-1\Leftrightarrow\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\ge-1\Leftrightarrow\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\ge-\frac{1}{2}$

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-3x^2-1$. Έστω $A\left(x_1,f(x_1)\right)$ και $B\left(x_2 g(x_2)\right)$ τα σημεία επαφής των C_f,C_g αντίστοιχα. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει να ισχύει $f'(x_1)=g'(x_2)$. Παρατηρούμε ότι $g'(x)=-3x^2-1\le-1$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$, οπότε $g'(x_2)\le-1$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$. Τέλος, από το Δ3.i. ισχύει ότι $f'(x_1)\ge-1$ με την ισότητα να ισχύει για $x_1=1$. Οπότε τα μοναδικά σημεία επαφής είναι τα $A\left(1,f(1)\right)$ και $B\left(0,g(0)\right)$.

Άρα, η κοινή τους εφαπτομένη είναι η $y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$.