ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 194

Α2. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 188

Α3. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 259

Α4.

α→Λάθος

β→Σωστό

γ→Λάθος

δ→Σωστό

ε→Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=(2|z-1|)^2 \Leftrightarrow (z-4)\cdot(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow 3z\overline{z}=12 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$

Β2. Επειδή οι z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο θα ισχύει ότι

$$|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=4 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\frac{4}{z_1}$$

και

$$|z_2|=2 \Leftrightarrow |z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2}=4 \Leftrightarrow \overline{z_2}=\frac{4}{z_2}$$

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{w}=w$.

Είναι

$$\overline{w}=\frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w$$

Επομένως $w\in\mathbb{R}$

β) ***α΄ τρόπος***

Αρκεί να δείξω ότι

$$-4\leq w\leq 4 \overset{w\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} |w|\leq 4$$

Οπότε

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2 + 2 = 4$$

Άρα

$$|w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$$

β′ τρόπος

Είναι

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{z_1\overline{z_2}}{2} + \frac{z_2\overline{z_1}}{2} = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = \frac{1}{2}\cdot 2Re(z_1\overline{z}_2) = Re(z_1\overline{z}_2)$$

Οπότε αρκεί να δείξω ότι

$$-4 \le w \le 4 \Leftrightarrow -4 \le Re(z_1\overline{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow |Re(z_1\overline{z}_2)| \le 4$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 8 - 2Re(z_1\overline{z}_2)$$

Επίσης $|z_1 - z_2| \le 2\rho \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \le 4$

Άρα

$$0 \le |z_1 - z_2|^2 \le 16 \Leftrightarrow 0 \le 8 - 2Re(z_1\overline{z}_2) \le 16 \Leftrightarrow -8 \le -2Re(z_1\overline{z}_2) \le 8 \Leftrightarrow$$
$$4 \ge Re(z_1\overline{z}_2) \ge -4 \Leftrightarrow -4 \le Re(z_1\overline{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$$

Β3. Είναι

$$w = -4 \Leftrightarrow -4 = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow -2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow$$

$$-2z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

Άρα

$$(AB) = |z_1 - z_2| = 2|z_1|$$
$$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1||1 - 2i| = \sqrt{5}|z_1|$$
$$(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = \sqrt{5}|z_1|$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές αφού $(A\Gamma) = (B\Gamma)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \ge 0$$

για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}(x^2+1)}=0$$

επειδή

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}(x^2+1)\right)=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Επομένως

$$f(A)=(0,+\infty)$$

Γ2. Η εξίσωση γίνεται

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)\xLeftrightarrow[\acute{\alpha}\rho\alpha\ 1-1]{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow$$
$$\frac{e^3}{e^x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Αφού

$$\frac{e^3}{2}\epsilon(0,+\infty)$$

και η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.

Γ3. Θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_0^x f(t)dt,\qquad x\epsilon\mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη καθώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x>0$ η h είναι συνεχής στο $[2x,4x]$, παραγωγίσιμη στο $(2x,4x)$ με

$$h'(x)=f(x)>0$$

οπότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\epsilon(2x,4x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=\frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x}=\frac{\int_0^{4x}f(t)dt-\int_0^{2x}f(t)dt}{2x}=\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}$$

Όμως

$$\xi<4x\xLongrightarrow{h'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}h'(\xi)<h'(4x)\Leftrightarrow\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}<f(4x)\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x)$$

Γ4. Για $x>0$ είναι

$$g(x)=\frac{1}{x}\left(-\int_0^{2x}f(t)dt+\int_0^{4x}f(t)dt\right)=\frac{1}{x}\left(-h(2x)+h(4x)\right)$$

Οι συναρτήσεις $h(2x)$ και $h(4x)$ είναι παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\big(-h(2x)+h(4x)\big)+\frac{1}{x}\big(-2h'(2x)+4h'(4x)\big) =$$
$$= -\frac{1}{x^2}\left(-\int_0^{2x} f(t)dt + \int_0^{4x} f(t)dt\right)+\frac{1}{x}\big(-2f(2x)+4f(4x)\big) =$$
$$= \frac{\int_0^{2x} f(t)dt - \int_0^{4x} f(t)dt - 2xf(2x) + 4xf(4x)}{x^2} =$$
$$= \frac{-\int_{2x}^{4x} f(t)dt + 2x\big(f(4x)-f(2x)\big)+2xf(4x)}{x^2}$$

Όμως

$$2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0, \text{για κάθε } x>0 \text{ από το Γ3 και}$$

$$2x < 4x \overset{f \text{ γν.αύξουσα}}{\Longleftrightarrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow f(4x)-f(2x) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x\big(f(4x)-f(2x)\big) > 0, \qquad \text{για κάθε } x > 0$$

και

$$x^2 > 0, \qquad \text{για κάθε } x > 0$$

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επίσης η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ αφού είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Όμως

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\big(-h(2x)+h(4x)\big) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{h(4x)-h(2x)}{x} \overset{\substack{DLH\\ h \text{ παραγ.}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{4h'(4x)-2h'(2x)}{1} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\big(4f(4x)-2f(2x)\big) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} 4f(0)-2f(0) = 2f(0) = 2 = g(2)$$

Άρα g συνεχής στο 0 συνεπώς g συνεχής στο $[0,+\infty)$ και αφού $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)e^{f(x)} + e^{-f(x)}f'(x) = 2 \Leftrightarrow \big(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\big)' = (2x)'$$

Από συνέπειες ΘΜΤ υπάρχει σταθερά $c \epsilon \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \qquad x \epsilon \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \overset{\cdot e^{f(x)}}{\Longleftrightarrow} e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{x^2 + 1}$$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} - x,\ x\epsilon\mathbb{R}$.
Αφού $x^2 + 1 \neq 0$ τότε $g^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.
Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ και αφού $g(x) \neq 0$ οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0) = 1 > 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

Οπότε
$$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$
Πρέπει $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x$ $(\mathbf{1})$
Αν $x \geq 0$ τότε η (1) ισχύει.
Αν $x < 0$ τότε η (1) γίνεται $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει.
Συνεπώς $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.
Επομένως
$$f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad x\epsilon\mathbb{R}$$

Δ2.

α) Για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$ έχουμε
$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x^2 + 1)'\right) =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Οπότε,
$$f''(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = -\frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

Έχουμε
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$
αφού $(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.
Οπότε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		σ.κ.	

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$

Έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))$ δηλαδή το $O(0,0)$

β) Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega)=\int_0^1 |f(x)-x|dx=\int_0^1 \left|ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x\right|dx$$

Παρατηρώ ότι η $y=x$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$.

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ η C_f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x\epsilon[0,+\infty)$ είναι

$$f(x)\le y\Leftrightarrow ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\le x\Leftrightarrow ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x\le 0$$

Συνεπώς

$$E(\Omega)=\int_0^1\left(x-ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)'ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[xln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\left(ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}-ln(1+\sqrt{2})+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}-ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-ln(1+\sqrt{2})\ \tau.\mu.$$

Δ3. Για κάθε $x>0$ έχουμε $x^2>0\Leftrightarrow x^2+1>1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>1$ άρα

$$x+\sqrt{x^2+1}>1\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)>ln1\Leftrightarrow f(x)>0$$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Αφού f^2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών τότε η συνάρτηση ολοκλήρωμα

$$\int_0^x f^2(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση

$$e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και συνεχής.

α' τρόπος

Για $x>0$ αφού $f^2(t)>0$ για κάθε $t\epsilon[0,x]$ και f^2 συνεχής στο $[0,x]$ τότε το

$$\int_0^x f^2(t)dt>0$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)lnf(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\cdot lnf(x)\right)\right]=1\cdot 0=0$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)'}{f^2(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f^2(x)}=e^0=1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x f^2(t)dt\cdot lnf(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{lnf(x)}{\frac{1}{\int_0^x f^2(t)dt}}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}\cdot f^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2\cdot f'(x)}{f^3(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}{f^3(x)}\cdot f'(x)\right)=0\cdot 1=0$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}{f^3(x)}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\int_0^x f^2(t)dt\cdot f^2(x)}{3f^2(x)\cdot f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\int_0^x f^2(t)dt}{3f'(x)}=\frac{-2\cdot 0}{3}=0$$

επειδή f' συνεχής στο 0

β' τρόπος

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)lnf(x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot\left(x\cdot lnf(x)\right)\right]=0\cdot 0=0$$

Διότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)'}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\right)=e^0\cdot f^2(0)=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot lnf(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{lnf(x)}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\cdot f'(x)}{f(x)}=0$$

καθώς

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{f(x)} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{f'(x)}=\frac{0}{f'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

επειδή f' συνεχής στο 0

Δ4. Για $x\neq 2$ και $x\neq 3$ είναι

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0$$

Θεωρώ την

$$\varphi(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right),\qquad \mu\varepsilon\ \ x\epsilon[2,3]$$

Η φ είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi(2)=-\left(8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right)=3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0$$

διότι για κάθε $x\geq 0$ έχουμε

$$0<f(x)\leq x\Leftrightarrow f^2(x)\leq x^2\Leftrightarrow x^2-f^2(x)\geq 0$$

Θεωρώ την

$$k(x)=x^2-f^2(x),\qquad x\epsilon[0,2]$$

η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Αφού $k(x)\geq 0$ για κάθε $x\epsilon[0,2]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Τότε

$$\int_0^2 k(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^2 x^2dx>\int_0^2 f^2(x)dx\Leftrightarrow\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2>\int_0^2 f^2(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{3} > \int_0^2 f^2(x)dx \Leftrightarrow 8 > 3\int_0^2 f^2(x)dx \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(x)dx - 8 < 0$$

Επίσης

$$\varphi(3) = 1 \cdot \left(1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt\right) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt > 0$$

διότι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$f(x^2) \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - f(x^2) \geq 0$$

Όμοίως αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^1 \left(x^2 - f(x^2)\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 f(x^2)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 > \int_0^1 f(x^2)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} > \int_0^1 f(x^2)dx \Leftrightarrow 1 > 3\int_0^1 f(x^2)dx \Leftrightarrow 1 - 3\int_0^1 f(x^2)dx > 0$$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$ της εξίσωσης

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right) + (x-3)\left(8 - 3\int_0^x f^2(t)dt\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8 - 3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2} = 0$$