ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 185

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο

$$A = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 2 | \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \geq 2 | \sqrt{x-2} > 0\} = (2, +\infty)$$

με τύπο

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}\big) = ln\sqrt{x-2}^{\,2} = \ln(x-2)$$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0, \qquad \text{για κάθε } x > 2$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$D_{h^{-1}} = h\big((2, +\infty)\big) = \Big(\lim_{x \to 2^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)\Big) = (-\infty, +\infty)$$

αφού

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(x-2) \overset{\theta έτω}{\underset{u=x-2}{=}} \lim_{u \to 0^+} lnu = -\infty$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x-2) \overset{\theta έτω}{\underset{u=x-2}{=}} \lim_{u \to +\infty} lnu = +\infty$$

Θέτω,

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$$

Δηλαδή $h^{-1}(x) = e^x + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

Β3. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(ln(x-2)\cdot\frac{2\,ln(x-1)}{x-2}\right)=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{2}{x-1}}{1}=2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i) Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

Αν $\kappa\neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\kappa x=\begin{cases}+\infty, αν\ \kappa>0\\ -\infty, αν\ \kappa<0\end{cases}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άρα $\kappa=0$.

Οπότε $f(x)=\frac{\mu x}{x^2+1}$.

ii) Αφού η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων τότε ισχύει ότι $\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=1\end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=\frac{\mu(x^2+1)-\mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

Άρα, $f'(0)=1\Leftrightarrow\mu=1$.

Οπότε

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\ \ και\ \ f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Γ2.

i) Ισχύει

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow -1<x<1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$. Τέλος η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-1$ με $f(-1)=-\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2=1$ με $f(1)=\frac{1}{2}$.

ii) Στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Στο $\Delta_2=[-1,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f(\Delta_2)=[f(-1),f(1)]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

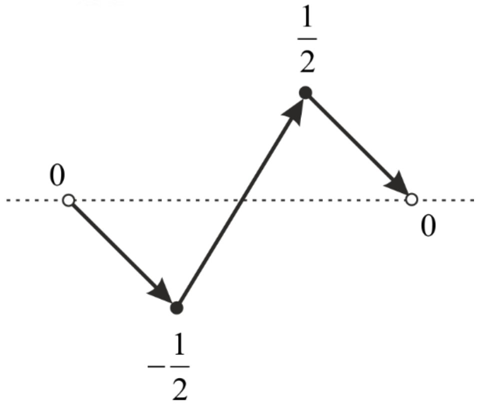
$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η εικόνα της γραφικής παράστασης της f



Διακρίνω περιπτώσεις για τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$, η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{1}{2}$ η οποία έχει μοναδική λύση.

Γ3.

i) Είναι

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx \\ &= \int_0^1 (x^{2\nu+1})dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

ii) Είναι

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln1 = \frac{1}{2}ln2$$

Για $\nu = 0$, από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

Για $\nu = 1$, από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2 \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ με $x \in [-1,0]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$
- $h(0) = g(0) > 0$

διότι από υπόθεση ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$.

Αφού $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ και η h' είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, τότε η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Δηλαδή, $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ ή $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$.

Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Άρα η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,0]$, οπότε η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

Δ2. Αφού η f παραγωγίσιμη τότε είναι παραγωγίσιμη και στο 0 δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad (1)$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}[x(g(x)+x)] = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) = 2+1-\kappa = 3-\kappa$$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται $0 = 3-\kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ3.

i) Για $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$

και για $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$f''(x) = -2\eta\mu x + \frac{2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} = -2\eta\mu x\left(1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)$$

$$= -2\eta\mu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} > 0$$

για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και για

$$x > 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και για $x \geq 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

ii) Η εξίσωση γράφεται $f(x) = \frac{\pi}{3}$.

Στο $\Delta = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(\Delta) = \left[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0,+\infty)$$

διότι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x\right) = +\infty$ αφού

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Αφού $\frac{\pi}{3} \in f(\Delta)$ θα υπάρχει $x_2 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το x_2 μοναδικό.

Δ4.

i) Για $x \in [x_1, 0]$ είναι $f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 h(x)$.
Είναι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$ και αφού είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Όμως, $h(0) = g(0) > 0$ άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$.
Επομένως, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

ii) Επειδή ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά ισχύει ότι

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \quad (1)$$

Είναι

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{x_1}^{0}\left(x^2(g(x) + x)\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\cdot(g(x) + x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}\cdot(g'(x) + 1)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4}\right)$$

Επίσης

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right) dx$$
$$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{3\cdot\frac{\pi^2}{9}}{2} + 2$$
$$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) είναι

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4}\right) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \overset{\cdot(-3)}{\iff}$$
$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = -3 - 3ln2 + \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3ln2 - 3$$