ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α4.

α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο

$$A = \{x \in D_h / h(x) \in D_g\} = \{x > 0 / lnx \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

με τύπο

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4 - e^{lnx^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2.

i) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή συνάρτηση και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2}$$

Ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) Ισχύει

$$e < \pi \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4 - e^2}{e} > \frac{4 - \pi^2}{\pi} \xLeftrightarrow{\cdot\pi(4-e^2)<0} \frac{\pi}{e} < \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2}$$

Β3. Ελέγχω αν έχει <u>κατακόρυφη ασύμπτωτη</u> στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[(4 - x^2) \cdot \frac{1}{x}\right] = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Ελέγχω για <u>πλάγια ασύμπτωτη</u> στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Επομένως η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x$.

Β4. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right)$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x} = 0$$

Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\left|\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|\cdot|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right| \Leftrightarrow$$

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \le \frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2) \le \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{4-x^2}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{4-x^2}\right| = 0$$

οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = \int_2^3(1+\alpha x)dx = \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= 3+\frac{9\alpha}{2}-2-2\alpha = 1+\frac{5\alpha}{2}$$

Όμως

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow 1+\frac{5\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Για τα παρακάτω ερωτήματα

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Γ2.

i) Για να ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$, αρκεί να αποδείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.
Είναι

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x-2) = -1$$

επίσης

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 = f'(1)$$

ii) Η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας (ε) είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$.
Ισχύει $εφω = f'(1) = -1$ επομένως $ω = 135°$ αφού $0 \leq ω < 180°$.

Γ3. Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως ρητή. Επίσης από το ερώτημα Γ2, η f παραγωγίσιμη στο 1, άρα η f παραγωγίσιμη στο ℝ οπότε και συνεχής.
Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Για $x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.
Για $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Αφού η f συνεχής στο 1 τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο ℝ, οπότε είναι 1-1.

Επειδή η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα, τότε το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty),\qquad \delta\iota\acute{o}\tau\iota$$

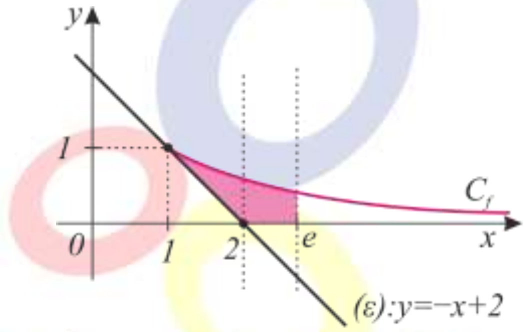
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

Γ4. Η ευθεία (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x=2$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ με $x\geq 1$ η οποία είναι κυρτή και η ευθεία (ε). Το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x\geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$ είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο που φαίνεται παρακάτω.



Το εμβαδόν δίνεται:

$$E(\Omega)=\int_1^2(f(x)-y)\,dx+\int_2^e f(x)\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[lnx+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+[lnx]_2^e=ln2+2-4-\frac{1}{2}+2+lne-ln2=\frac{1}{2}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Θέτω

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,1)\cup(1,2)\quad \kappa\alpha\iota\quad \lim_{x\to1}g(x)=\ell$$

Για $x\neq 1$ είναι

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\Leftrightarrow f(x)-2x=g(x)(x-1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+2x$$

και

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(g(x)(x-1)+2x)=2$$

Αφού f συνεχής στο 1 τότε $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)\Leftrightarrow -1+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa=3$.

Άρα, $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3, x\in(0,2)$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}\cdot(-1) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2\cdot(x-2)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		2
x^2+x-2		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$.

Στο $\Delta_1 = (0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$$

διότι, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = ln2 - (+\infty) + 3 = -\infty$

Στο $\Delta_2 = [1,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in \Delta_1$ (με $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) = 2 \neq 0$) η οποία είναι και μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα.

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \Delta_2$ (με $x_2 \neq 1$ αφού $f(1) = 2 \neq 0$) η οποία είναι και μοναδική αφού f γνησίως φθίνουσα.

Τέλος, για $0 < x_1 < \frac{1}{3} < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$, που ισχύει.

Δ3. Εφαρμόζω Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^4} < 0, \text{για κάθε } x \in (0,2)$$

Άρα, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$ οπότε και η ρίζα $x = \xi$ είναι μοναδική.

Δ4.

i. Αφού F, G είναι δύο αρχικές της f στο $(0,2)$ από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι

$$F(x) = G(x) + c \quad (1)$$

Για $x = x_1$ η (1) γίνεται $0 = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1) \quad (2)$

Για $x = x_2$ η (1) γίνεται $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow c = F(x_2) \quad (3)$

Από (2) και (3) προκύπτει ότι $F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii. Για $x_1 < x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Για $1 < x < x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Αφού $f(x_1) = f(x_2) = 0$ τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $[x_1, x_2]$.

Άρα

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0 \Leftrightarrow F(x_2) > 0$$

και

$$G(x_1) = -F(x_2) < 0$$

Θεωρώ την συνάρτηση

$$h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \qquad x \in [x_1, x_2]$$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ώς άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(x_1) = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$
- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 = -x_1G(x_1) + x_2 - x_1 > 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον λύση $x_0 \in (x_1, x_2)$ της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Για $x \in (x_1, x_2)$ η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση.

Άρα η x_0 είναι μοναδική λύση.