***ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ***
***ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ***
***ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2023***

## *ΘΕΜΑ Α*

***Α1.*** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 30

***Α2.*** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 22

***Α3.***

***α)*** Λάθος
***β)*** Σωστό
***γ)*** Σωστό
***δ)*** Λάθος
***ε)*** Σωστό

## *ΘΕΜΑ Β*

***Β1.*** Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = (2x^3 + ax^2 - 12x + 10)'$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12 \text{ για κάθε } x \in R$$

***Β2.*** Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα xx΄ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=0⇔

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

***Β3.*** Για α= 3: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10, x \in R$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

| x | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | | ↗ | Τ.Μ. | ↘ | Τ.Ε. | ↗ | |

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ $και$ $[1, +\infty)$και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [-2, 1].

Η f για x=-2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 =$$
$$= 2(-8) + 3 \cdot 4 + 24 + 10 =$$
$$= -16 + 12 + 24 + 10 = 30$$

Ενώ για x=1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 =$$
$$= 2 + 3 - 12 + 10 = 3$$

***Β4.***

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6(x^2 + x - 2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{6\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} 6(x+2) = 6(1+2) = 18$$

***ΘΕΜΑ Γ***

***Γ1.***

Το κέντρο της τρίτης κλάσης είναι: $\boldsymbol{x_3 = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18}$

Το κέντρο της τρίτης κλάσης είναι: $\boldsymbol{x_4 = \frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22}$

| **Κλάσεις** [ , ) | **Κεντρική τιμή** $x_i$ | **Συχνότητα** $\nu_i$ | $x_i \nu_i$ |
|---|---|---|---|
| [8.12) | 10 | 20 | 200 |
| [12.16) | 14 | 15 | 210 |
| [16.20) | 18 | $\nu_3$ | $18\nu_3$ |
| [20.24) | 22 | 5 | 110 |
| | Σύνολο | $\nu_3 + 40$ | $18\nu_3 + 520$ |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} \Leftrightarrow$$
$$14 = \frac{18\text{v}_3 + 520}{\text{v}_3 + 40} \Leftrightarrow$$
$$18\text{v}_3 + 520 = 14(\text{v}_3 + 40) \Leftrightarrow$$
$$18\text{v}_3 + 520 = 14\text{v}_3 + 560 \Leftrightarrow$$
$$18\text{v}_3 - 14\text{v}_3 = 560 - 520 \Leftrightarrow$$
$$4\text{v}_3 = 40 \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{v_3 = 10}$$

***Γ2.***

Ο πίνακας γίνεται:

| **Κλάσεις** [ , ) | **Κεντρική τιμή** $x_i$ | **Συχνότητα** $\nu_i$ | $x_i \nu_i$ |
|---|---|---|---|
| [8.12) | 10 | 20 | 200 |
| [12.16) | 14 | 15 | 210 |
| [16.20) | **18** | **10** | **180** |
| [20.24) | **22** | 5 | **110** |
| | Σύνολο | **50** | **700** |

***Γ3.***

| **Κλάσεις** [ , ) | **Κεντρική τιμή** $x_i$ | **Συχνότητα** $\nu_i$ | $x_i\nu_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{\bar{x}})^2$ | $(x_i - \bar{\bar{x}})^2 \cdot \nu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [8.12) | 10 | 20 | 200 | -4 | 16 | 320 |
| [12.16) | 14 | 15 | 210 | *0* | *0* | *0* |
| [16.20) | **18** | **10** | **180** | 4 | 16 | 160 |
| [20.24) | **22** | 5 | **110** | 8 | 64 | 320 |
| | Σύνολο | **50** | **700** | | | 800 |

Επομένως η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{\bar{x}})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{800}{50} = 16$$

***Γ4.***
Η τυπική απόκλιση είναι:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$$

Επομένως

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \cong 0.28 \text{ ή } 28\%$$

Αφού $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

***ΘΕΜΑ Δ***

***Δ1.*** Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \frac{(-1)'(x^2) - (-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0+2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} \text{ για } x \neq 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} > 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} < 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f΄(x) | - | | + |
| f(x) | ↘ | | ↗ |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

***Δ2.***

Η f είναι γνησίως φθίνουσα [-4,-1] οπότε έχουμε:

$-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^2} \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}}$$

***Δ3.***

Έστω ε: $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο M(1,f(1)). Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^4} = 2$$

Άρα ε: $y = 2x + \beta$

$$f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι M(1,-1).

Το M ανήκει στην ε, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή ισχύει

$$-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M είναι y=2x-3

***Δ4.***

Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ ανήκουν στην εφαπτομένη οπότε για τις τεταγμένες τους ισχύει ότι $y_i = 2x_i - 3$ με i=1,2,3. Οπότε $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ και

$$s_y = |2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

Οπότε ο συντελεστής μεταβολής των τε ταγμένων είναι

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0.8$$