ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161

Α4.

- ***α)*** Σωστό
- ***β)*** Σωστό
- ***γ)*** Σωστό
- ***δ)*** Λάθος
- ***ε)*** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $h = f \circ g$ ορίζεται για

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Οπότε $D_h = [0,1]$ με τύπο

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.
Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, οπότε είναι 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h, δηλαδή

$$D_{h^{-1}} = h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Θέτω $h(x) = y \Rightarrow (x-1)^2 = y \xRightarrow{y \in [0,1]} |x-1| = \sqrt{y} \xRightarrow{x-1 \leq 0} 1 - x = \sqrt{y} \Rightarrow$

$$x = 1 - \sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$$

Άρα τελικά $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ με $x \in [0,1]$.

Β3.

i) Είναι

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Η φ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών.
Ελέγχω αν η φ είναι συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$$

Δηλαδή η φ συνεχής και στο 1.

Άρα, φ συνεχής στο $[0,1]$ με $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$. Οπότε για τη συνάρτηση φ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Η συνάρτηση $t(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε έχουμε

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$$

Οπότε η τιμή $\eta\mu\alpha$ βρίσκεται μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, με $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι $f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = (-2x)'$
και επειδή f συνεχής στο $(-\infty, -1)$, από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = -2x + c_1$$

Για $x > -1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$
και επειδή f συνεχής στο $(-1, +\infty)$, από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = x^3 - x + c_2$$

Όμως, η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $f(0) = 0$, επομένως $c_2 = 0$.

Επειδή, η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε συνεχής και στο -1, δηλαδή

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Όμως,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$

και

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - x) = -1 + 1 = 0$$

Άρα, $f(-1) = 2 + c_1 = 0 \Rightarrow f(-1) = 0$ και $c_1 = -2$.

Τελικά,

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 > -1$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 είναι

$$-2 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Rightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Rightarrow$$
$$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Rightarrow 2x_0^3 = 2 \Rightarrow x_0^3 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$$

Είναι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 2$ οπότε η εξίσωση της (ε) είναι

$$y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

Γ3. Έστω $M\big(x(t), y(t)\big)$ σημείο της (ε) οπότε

$$y(t) = 2x(t) - 2$$

με $x(t) > 2$ επομένως $y(t) > 0$.

Αφού Κ η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$ τότε οι συντεταγμένες του είναι $K(x(t), 0)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ είναι

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (MK) \cdot (K\Gamma) = \frac{1}{2}|y(t)| \cdot |x(t) - 2| = \frac{1}{2} y(t) \cdot (x(t) - 2)$$
$$= \frac{1}{2}(2x(t) - 2)(x(t) - 2) = (x(t) - 1)(x(t) - 2)$$

Για $t = t_0$ το Μ διέρχεται από το $B(3,4)$ δηλαδή $x(t_0) = 3$ μονάδες και $y(t_0) = 4$ μονάδες, επίσης $x'(t_0) = 2$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Οπότε, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού σε χρόνο t είναι

$$E'(t) = x'(t)(x(t) - 2) + (x(t) - 1) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ είναι

$$E'(t_0) = x'(t_0)(x(t_0) - 2) + (x(t_0) - 1) \cdot x'(t_0)$$
$$= 2 \cdot (3 - 2) + (3 - 1) \cdot 2$$
$$= 6\ \tau\varepsilon\tau\rho.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\lambda\varepsilon\pi\tau o$$

Γ4. Θα υπολογίσω το κάθε όριο χωριστά.
Για το

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu(-2x - 2)}{-2x - 2}$$

θέτω $-2x - 2 = u$ οπότε για $x \to -\infty$ τότε $u \to +\infty$, άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0\ \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$$

$$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| \leq \left|\frac{1}{u}\right| \Rightarrow -\frac{1}{|u|} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{|u|}$$

Όμως,

$$\lim_{u \to +\infty} \left(-\frac{1}{|u|}\right) = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{|u|} = 0$$

Οπότε, από κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$$

Επίσης στο

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$$

θέτω $-x=u$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

Λύνω τις:

- $f'(x)=0\Rightarrow\frac{x-1}{x}=0\Rightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Rightarrow\frac{x-1}{x}>0\Rightarrow x>1$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Στο $\Delta_1=(0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=[1-ln3,+\infty)$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1 - ln3, +\infty)$$

γιατί

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 - ln3$ αφού η f συνεχής στο 1

και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x - \ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{3x} = 0$$

Είναι $e < 3 \Rightarrow lne < ln3 \Rightarrow 1 - ln3 < 0 \Rightarrow f(1) < 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in \Delta_1$ (με $x_1 < 1$) η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \Delta_2$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \; για\; κάθε\; x > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα x_1 και x_2 τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Είναι:

- $x_1 \leq x \leq 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$, και
- $1 \leq x \leq x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq 0$

Άρα

$$E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x-\ln(3x))dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x)-x)dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} xdx = \int_{x_1}^{x_2} (x)'\ln(3x)\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$= [xln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\cdot\frac{1}{\mathrm{x}}dx - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}$$
$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - (x_2-x_1) + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}$$

Όμως $f(x_1)=0 \Rightarrow x_1-\ln(3x_1)=0 \Rightarrow \ln(3x_1)=x_1$ και

$$f(x_2)=0 \Rightarrow x_2-\ln(3x_2)=0 \Rightarrow \ln(3x_2)=x_2$$

Οπότε

$$E = x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}$$
$$= \frac{2x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_1^2 - x_2^2}{2}$$
$$= \frac{x_2^2 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2}{2} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Είναι $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 2-x_1 > 1$

Οπότε $f(2-x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2-x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2-x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2 > 2$
που ισχύει διότι από Δ2 ερώτημα, το εμβαδόν είναι θετικό δηλαδή

$$E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2) > 0 \xrightarrow{\frac{1}{2}(x_2-x_1)>0} x_1+x_2-2 > 0 \Leftrightarrow x_1+x_2 > 2$$

Δ4. Για $x>0$ η εξίσωση γράφεται $2f(x) = 1 - ln3 + f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow$

$$2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x-x_2)$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της C_f στα σημεία $K\big(1, f(1)\big)$ και $\Lambda\big(x_2, f(x_2)\big)$ αντίστοιχα είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(1) = f'(1)(x-1) \overset{f'(1)=0}{\Longleftrightarrow} y - f(1) = 0 \Leftrightarrow y = f(1)$$

και

$$(\varepsilon_2): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Αφού f κυρτή στο $(0, +\infty)$ τότε η C_f θα βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
Δηλαδή ισχύει ότι

- $f(x) \geq f(1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, και
- $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ανισώσεις προκύπτει ότι

$$2f(x) > f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \text{ για κάθε } x > 0$$

Οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επιμέλεια θεμάτων: Γουμενάκη Εύα, Γραμματικάκης Γιάννης, Χριστοφάκης Γιώργος